上海众凯培训学校

综合能力考试大纲

考研核心数学公式

电　　话：021-51086775　61508004

网　　址：www.zhongkaiedu.com

论　　坛：bbs.zhongkaiedu.com

网络课堂：class.zhongkaiedu.com

目　　录

管理类专业学位联考综合能力考试大纲

I、考试性质

综合能力考试是为高等院校和科研院所招收管理类专业学位硕士研究生而设置的具有选拔性质的全国联考科目，其目的是科学、公平、有效地测试考生是否具备攻读专业学位所必需的基本素质、一般能力和培养潜能，评价的标准是高等学校本科毕业生所能达到的及格或及格以上水平，以利于各高等院校和科研院所在专业上择优选拔，确保专业学位硕士研究生招生质量。

II、考查目标

1．具有运用常数基础知识、基本方法分析和解决问题的能力。

2．具有较强的分析、推理、论证等逻辑思维能力。

3．具有较强的文字材料理解能力、分析能力以及书面表达能力。

III、考试形式和试卷结构

一、试卷满分及考试时间

试卷满分为 200 分，考试时间为 180 分钟。

二、答题方式

答题方式为闭卷、笔试。不允许使用计算器。

三、试卷内容与题型结构

数学基础	75 分，有以下两种题型：
问题求解	15 小题，每小题 3 分，共 45 分
条件充分性判断	10 小题，每小题 3 分，共 30 分
逻辑推理	30 小题，每小题 2 分，共 60 分

写作	2 小题，其中论证有效性分析 30 分，论说文 35 分，共 65 分

IV、考查内容

一、数学基础

综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力，通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试。

试题涉及的数学知识范围有：

（一）算术

1．整数

（1）整数及其运算

（2）整除、公倍数、公约数

（3）奇数、偶数

（4）质数、合数

2．分数、小数、百分数

3．比与比例

4．数轴与绝对值

（二）代数

1．整式

（1）整式及其运算

（2）整式的因式与因式分解

2．分式及其运算

3．函数

（1）集合

（2）一元二次函数及其图像

（3）指数函数、对数函数

4．代数方程

（1）一元一次方程

（2）一元二次方程

（3）二元一次方程

5．不等式

（1）不等式的性质

（2）均值不等式

（3）不等式求解

一元一次不等式（组），一元二次不等式，简单绝对值不等式，简单分式不等式。

6．数列、等差数列、等比数列

（三）几何

1．平面图形

（1）三角形

（2）四边形：矩形，平行四边形，梯形。

（3）圆与扇形

2．空间几何体

（1）长方体

（2）柱体

（3）球体

3．平面解析几何

（1）平面直角坐标系

（2）直线方程与圆的方程

（3）两点间距离公式与点到直线的距离公式

(i) （四）数据分析

1．计数原理

（1）加法原理、乘法原理

（2）排列与排列数

（3）组合与组合数

2．数据描述

（1）平均值

（2）方差与标准差

（3）数据的图表表示：直方图，饼图，数表。

3．概率

（1）事件及其简单运算

（2）加法公式

（3）乘法公式

（4）古典概型

（5）贝努里概型

二、逻辑推理

综合能力考试中的逻辑推理部分主要考查考生对各种信息的理解、分析、判断和综合，以及相应的推理、论证、比较、评价等逻辑思维能力，不考查逻辑学的专业知识。试题内容涉及自然、社会和人文等各个领域，但不考查相关领域的专业知识。

三、写作

综合能力考试中的写作中部分主要考查考生的分析论证能力和文字表达能力，通过论证有效性分析和论说文两种形式来测试。

1．论证有效性分析

论证有效性分析试题的题干为一段有缺陷的论证，要求考生分析其中存在的问题，选择若干要点，评论该论证的有效性。

本类试题的分析要点是：论证中的概念是否明确，判断是否准确，推理是否严密，论证是否充分等。

文章要求分析得当，理由充分，结构严谨，语言得体。

2．论说文

论说文的考试形式有种：命题作文、基于文字材料的自由命题作文。每次考试为其中一种形式。要求考生在准确、全面地理解题意的基础上，对命题或材料所给观点进行分析，表明自己的观点并加以论证。

文章要求思想健康，观点明确，论据充足，论证严密，结构合理，语言流畅。

第一章 实数的概念、性质和运算

一、数的概念、与性质

（1）自然数：0，1，2……

整数：……，-2，-1，0，1，2

分数：将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数。

百分数：表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数，通常用“%”来表示。

数的整除：当整数 a 除以非零整数 b,商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a。

倍数，约数：当 a 能被 b 整除时，称 a 是 b 倍数，b 是 a 的约数。

素数：只有 1 和它本身两个约数的数，最小的素数是 2。

合数：除了 1 和它本身还有其它约数的数，最小的合数是 4。

互质数：公约数只有 1 的两个数称为互质数。

（2）实数的分类

$$\text{实数}R\begin{cases}\text{有理数}\frac{n}{m}、\ n\in Z\quad m\in Z^{+}\\ \text{（有限小数和无限循环小数）}\begin{cases}\text{整数}Z\text{（正整数、零、负整数）}\\ \text{分数（正分数、负分数）}\end{cases}\\ \text{无理数（无限不循环小数）}\end{cases}$$

$$\text{整数}Z\begin{cases}\text{偶数：}2n\\ \text{奇数：}2n\pm1\end{cases}\left(n\in Z\right)$$

$$\text{正整数}\begin{cases}1\text{：仅有}1\text{一个正约数}\\ \text{质数：仅有}1\text{和其自身两个正约数}\\ \text{合数：除}1\text{和其自身外至少还有一个正约数}\end{cases}$$

（3）数的整除相关特征：

若一个整数的末位是 0、2、4、6 或 8，则这个数能被 2 整除。

若一个整数的数字和能被 3 整除，则这个整数能被 3 整除。

若一个整数的末尾两位数能被 4 整除，则这个数能被 4 整除。

若一个整数的末位是 0 或 5，则这个数能被 5 整除。

若一个整数能被 2 和 3 整除，则这个数能被 6 整除。

若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除。如果差太大或心算不易看出是否 7 的倍数，就需要继续上述『截尾、倍大、相减、验差』的过程，直到能清楚判断为止。例如 133 是否 7 的倍数的过程如下：$13-3\times2=7$，所以 133 是 7 的倍数；又例如判断 6139 是否 7 的倍数的过程如下：$613-9\times2=595$，$59-5\times2=49$，所以 6139 是 7 的倍数，以此类推。

若一个整数的末尾三位数能被 8 整除，则这个数能被 8 整除。

若一个整数的数字和能被 9 整除，则这个整数能被 9 整除。

能被 11 整除的数的特征：若把一个数由右边向左边数，将奇位

上的数字与偶位上的数字分别加起来，再求它们的差，如果这个差是11 的倍数（包括 0），那么，原来这个数就一定能被 11 整除。

二、实数的运算

（1）$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a（n为奇数） \\ |a|=\begin{cases} a(a\ge 0) \\ -a(a<0) \end{cases}（n为偶数） \end{cases}$

（2）$(\sqrt[n]{a})^{\mathrm{n}}=a(n\in z)$

（3）$\sqrt[n]{0}=0$

（4）负数没有偶次方根

（5）乘方与开方（乘积与分式的方根、根式的乘方与简化）

$$a^x a^y=a^{x+y}，\ \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}，\ (ab)^x=a^x b^x，\ \left(a^y\right)^x=a^{xy}，$$

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}，\ \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}，\ a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}，\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}，$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (a\ge 0)$$

注意：$a^0=1(a\ne 0)$

三、绝对值

1、非负性：即$|a| \geq 0$，任何实数a的绝对值非负。$\sqrt{a^2}=|a|$，

$|a \cdot b|=|a| \cdot |b|$，$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

归纳：所有非负性的变量

（1） 正的偶次方（根式）$a^2, a^4, \cdots, a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}} \geq 0$

（2） 负的偶次方（根式）$a^{-2}, a^{-4}, \cdots, a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{1}{4}} > 0$

（3） 指数函数 $a^x > 0$ （a>0 且$a \neq 1$）

考点：若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数必然为零。

2、 三角不等式，即$|a|-|b| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

左边等号成立的条件：$ab \leq 0$ 且$|a| \geq |b|$

右边等号成立的条件：$ab \geq 0$

四、平均值

1、算术平均值：

设有 n 个数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，称$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的算术平均值。

2、几何平均值：

设有 n 个正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的几何平均值。

3、当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正数时，它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即 $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n}$（$x_i>0,i=1\cdots n$）当且仅当 $x_1=x_2=\ldots=x_n$ 时，等号成立

4、注意此关系在求最值中的应用

用上述不等式求函数最值时，必须注意以下三点。

‘一正’——字母为正

‘二定’——和或积为定值（有时需通过“凑配法”凑出定值来）

‘三相等’——等号能否取到，即‘一正二定三相等’

注:(1)方差 各个数据与平均值之差的平方的平均值

$\delta^2=\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\bar{x}$为算术平均值

（2）标准差 方差的算术平方根：$\delta=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

注意，当从大量数据中挑出样本求标准差时

$\delta=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n\text{-}1}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

五、比和比例

1、增长率 $p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a\left(1+p\%\right)$

下降率 $p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a\left(1-p\%\right)$

注意：甲比乙大 $p\%\Leftrightarrow\frac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}}=p\%$，

甲是乙的 $p\%\Leftrightarrow\text{甲}=\text{乙}\cdot p\%$

2、增减性（$a,b,m>0$）

当 $\frac{a}{b}>1$，则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$；当 $0<\frac{a}{b}<1$，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

3、比例 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的性质：

① $ad=bc$（外项积=内项积）

② $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$（互换外项或内项）

③ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$（合比定理）

④ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$（分比定理）

⑤ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$（合分比定理）

注意本部分的应用题。

第二章 整式和分式

一、整式（单项式、多项式）

（1）几个常用公式（和与差的平方，和与差的立方，平方差，立方和，立方差等）

$$\left(x+a\right)\left(x+b\right)=x^2+\left(a+b\right)x+a$$

$$a^2-b^2=\left(a+b\right)\cdot\left(a-b\right) \qquad \left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$a^3\pm b^3=\left(a\pm b\right)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$a^n-b^n=\left(a-b\right)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+b^{n-1}\right)$$

(2) 多项式的因式分解

把一个多项式表示成几个整式之积的形式，叫做多项式的因式分解。在指定数集内进行因式分解时，通常要求最后结果中的每一个因式均不能在该数集内继续分解。多项式因式分解的常用方法如下：

方法一：提取公因式法

方法二：公式法（乘法公式从右到左，即为因式分解公式）

方法三：求根法。若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 有 n 个根 $x_1,x_{2,}\cdots x_n$，则多项式：

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=a_0\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\cdots\left(x-x_n\right)$。

方法四：二次三项式的十字相乘法

方法五：分组分解法

方法六：待定系数法

（3）余数定理和因式定理

I 余数定理　如果 $F\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ 除以一次因式 $\left(x-a\right)$ 所得的余数一定是 $F\left(a\right)$。因为 $F(x)=(x-a)g(x)+r$，令 $x=a$，必有 $F(a)=r$。

II 因式定理　多项式 $F(x)$ 含有因式 $\left(x-a\right)$，即 $F(x)$ 被 $\left(x-a\right)$ 整除的充要条件是 $F\left(a\right)=0$（即 $r=0$）。

二、分式及其运算

1、定义　若 A、B 表示两个整式，且 $B\neq 0$，B 中含有字母，则称 $\frac{A}{B}$ 是分式。分式和分母没有正次数的公因式的分式，称为最简分式（或既约分式）。

2、基本性质　分式的分子和分母同乘以（或除以）同一个不为零的式子，分式的值不变，即有 $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}\left(m\neq 0\right)$ 分式的基本性质主要应用在分式的通分和约分上。分式运算的最终结果如果仍为分式，此分式必须通过约分化为最简分式

第三章　方程和不等式

第一节　方程

1、一元一次方程、二元一次方程组

一元一次方程的形式是$ax+b=0$，其中$a\neq 0$，它的根为$x=-\frac{b}{a}$。

二元一次方程组的形式是$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，如果$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，则方程组有唯一解（x，y）。

2、一元二次方程

一元二次方程的形式是$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

（1）判别式：$\Delta=b^2-4ac$

（2）求根公式：$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（3）根与系数的关系：$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值来：

① $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

② $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

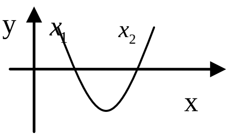
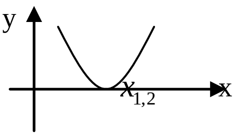
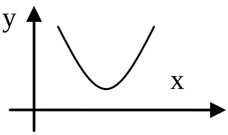
③ $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

（4）二次函数的图像

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

其图像是以 $x = -\frac{b}{2a}$ 为对称轴，$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 为顶点的抛物线

（5）图像与根的关系

$\Delta = b^2 - 4ac$	$f(x) = ax^2 + bx + c(a > 0)$	$f(x) = 0$ 根	$f(x) > 0$ 解
$\Delta > 0$		$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x < x_1$ 或 $x > x_2$
$\Delta = 0$		$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$	$x \neq -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$		无实数根	$x \in R$

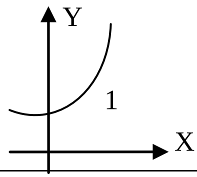
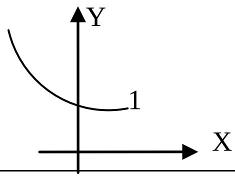
（6）要注意结合图像来快速解题

3、简单的指数方程和对数方程

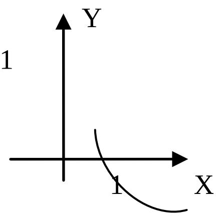
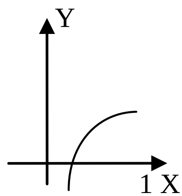
例如：$2^{x^2+1} = 5^{3x+4}, \lg(2x^2 - 2x + 3) = 1$ 等，像这样的方程可用换元法化为代数方程来求解。

指数对数函数图像与性质：

指数函数：$y=a^x$ $(a>0,且a\neq 1)$

图像	a>1 	0<a<1 
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
过点	$a>0$,且$a\neq 1$时　无论a取何值，恒过点（0, 1）	
单调性	定义域上单调递增	定义域上单调递减

对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

图像	0<a<1 	a>1 
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	R	
过点	$(1,0)$	
单调性	定义域上单调递减	定义域上单调递增

对数运算性质：

$$y=\log_{10}x=\lg x\left(\text{常用对数}\right)$$

$$y=\log_e x=\ln x(\text{自然对数})$$

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^x=x\log_a M$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}(a>0,\text{且}a\neq 1,c>0\quad \text{c}\neq 1,b>0)$$

$$\log_{a^n}b^n=\log_a b$$

$$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$$

$$\log_a b\cdot\log_b a=1$$

第二节　不等式

1、不等式的基本性质及基本不等式、绝对值不等式

（1）不等式运算

① $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$

② 若$c>0,a>b\Rightarrow ac>bc$；若$c<0,a>b\Rightarrow ac<bc$；

③ $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d;a>b,c>d\Rightarrow a-d>b-c;$

④ 若a,b同号，则$a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

⑤ 若$a>0,b>0,$ 则$a>b\Leftrightarrow a^n>b^n$；若$a>0,b>0,$ 则

$a>b\Leftrightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

（2）基本不等式

基本不等式整式形式

① $a^2+b^2\geq 2ab(a,b\in R)$

② $a^3+b^3+c^3\geq 3abc(a,b,c\in R^+)$

根式形式

① $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（$a,b\in R^+$)

② $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}(a,b,c\in R^+)$

分式形式

①$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$（$a,b\in R^{+}$） ② $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3(a,b,c\in R^{+})$

倒数形式

①$a+\frac{1}{a}\geq 2(a\in R^{+})$　　② $a+\frac{1}{a}\leq -2(a\in R^{-})$

注意上述不等式成立的条件及在求最值时的应用。

（3）绝对值不等式

① $|a+b|\leq|a|+|b|$　（$ab\geq 0$时等号成立）

② $|a+b|\geq|a|-|b|$（等式成立的条件$ab\leq 0$，且$|a|\geq|b|$）

③ $|a-b|\leq|a|+|b|$　（$ab\leq 0$时等号成立）

④ $|a-b|\geq|a|-|b|$ (等式成立的条件$ab\geq 0$，且$|a|\geq|b|$)

⑤ $-|a|\leq a\leq|a|$

⑥ 有限个实数之和的绝对值不大于它们的绝对值之和，即

$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leq|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

当它们同号时等号成立。

2、绝对值不等式、一元二次不等式、分式不等式、指数不等式、对数不等式的求解

（1）一元二次不等式

记 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)=0$ 的两根为α,β，

$\Delta = b^2 - 4ac$

① $\Delta < 0, f(x) > 0$ 的解集为 R； $f(x) < 0$ 的解集为 ϕ；

② $\Delta = 0, f(x) > 0$ 的解集为 $\{x \mid x \neq -\dfrac{b}{2a}, x \in R\}; f(x) < 0$ 的解集为 ϕ；

③ $\Delta > 0, f(x) > 0$ 且 $\alpha > \beta$ 时的解集为

$\{x \mid x > \alpha, 或 x < \beta\}; f(x) < 0$ 的解集为 $\{x \mid \beta < x < \alpha\}.$

一元二次不等式的解，也可根据二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像求解。

（2）注意对任意 x 都成立的情况

$ax^2 + bx + c > 0$ 对任意 x 都成立，则有：$a > 0$ 且 $\Delta < 0$

$ax^2 + bx + c < 0$ 对任意 x 都成立，则有：$a < 0$ 且 $\Delta < 0$

（3）要会根据不等式解集特点来判断不等式系数的特点

（4）其他不等式

① 简单的分式不等式

$$\frac{f(x)}{F(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)F(x) > 0 \\ F(x) \neq 0 \end{cases}; \frac{f(x)}{F(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)F(x) \geq 0 \\ F(x) \neq 0 \end{cases}$$

②简单的绝对值不等式

$|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$　（$a>0$）

$|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a$　（$a>0$）

$|f(x)|>|F(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>F^2(x)$

$|f(x)|<|F(x)| \Leftrightarrow f^2(x)<F^2(x)$

第四章　等差与等比数列

一、数列的概念

依某顺序排列成一列的数。表示方法：$a_1,a_2,a_3,\cdots a_{n-1},a_n$ 或数列 $\{a_n\}$。通项和通项公式：

（1）通项：a_n　；（2）通项公式：$a_n=f(n)$。

二、a_n 与 S_n 之间的关系

1．已知 a_n，求 S_n

2．已知 S_n，求 a_n

$$a_n=\begin{cases}a_1=S_1\\S_n-S_{n-1}(n\geq 2)\end{cases}$$

注意：$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，用此公式求则不包含 a_1，即用完此公式后，要进行验证首项是否符合公式，如果不符合，应该单列出首项。

三、等差数列

1、通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=nd+(a_1-d)$。当公差 d 不为零时，可将其抽象成关于 n 的一次函数 $f(n)=dn+(a_1-d)$，其斜率为 d，在 y 轴上的截距为 a_1-d。

2、等差中项：a，b，c 成等差数列 $\Leftrightarrow b-a=c-b\Leftrightarrow 2b=a+c$（b

称为 a 和 c 的等差中项）

3、前 n 项和公式（重点）

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=(\frac{d}{2})n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，当公差 d 不为 0 时，可将其抽象成关于 n 的二次函数 $f(n)=(\frac{d}{2})n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，此式特点：

（1）常数项为零，过零点；

（2）开口方向由 d 决定；

（3）二次项系数为 $\frac{d}{2}$；

（4）对称轴 $x=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$（求最值）；

（5）若 d 不为零，等差数列的前 n 项和只能为二次函数；若 d 等于零，则退化成一次函数。

注意：如果 S_n 是一个含有常数项的二次函数，则常数项被加在首项，其余各项不变，所以从第二项以后的各项仍然构成等差数列，其特点仍符合上述规律。其中在 a_1,a_n,d,n,S_n（知“三”求“二”）。

4、等差数列的性质

（1）通项性质

A) $a_m+a_n=a_k+a_t$，当 m+n=k+t 时成立。

注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件，一是角码之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。如：

$a_2+a_8+a_{12}=a_4+a_7+a_{11}\neq a_6+a_{16}$ （因为项数不同）

B)距首末等远两项之和均相等，且等于首项加上末项之和

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots\cdots=a_k+a_{n-k+1}$$

两项下角码之和只要是 n+1，则这两项距首末两项必等远

C)距任一项（第一项除外）前后等远两项之和必相等，即

$$2a_k=a_{k-1}+a_{k+1}=\cdots\cdots$$

两项下角码之和为 2k 时，这两项距 a_k 这项前后等远

（2）前 n 项和性质

A）若 S_n 为等差数列前 n 项和，则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$ 仍为等差数列，其公差为 n^2d 。

B）归纳：等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n，则有

$\frac{a_k}{b_k}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$。分析：$\frac{a_k}{b_k}=\frac{a_{2k}}{b_{2k}}=\frac{a_1+a_{2k-1}}{b_1+b_{2k-1}}=\frac{\frac{a_1+a_{2k-1}}{2}(2k-1)}{\frac{b_1+b_{2k-1}}{2}(2k-1)}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

四、等比数列（注意等比数列任一个元素均不能为零！）

1、通项：$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}=\frac{a_1}{q}q^n$

可以将其抽象成一个指数函数，其中底数等于公比。

等比中项：若 a,G,b 成等比数列，$G=\pm\sqrt{ab}$， G 称为 a,b 的等比

中项

2、前 n 项和公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}q^n$

3、所有项和：

对于无穷递缩等比数列 $(|q|<1,q\neq 0)$，存在所有项和：$S_n=\frac{a_1}{1-q}$

4、等比数列的性质

（1）通项性质

A) $a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_t$，当 m+n=k+t 时成立。

注意：可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是角码之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。如：

$a_2\cdot a_8\cdot a_{12}=a_4\cdot a_7\cdot a_{11}\neq a_6\cdot a_{16}$（因为项数不同）

B)距首末等远两项之积均相等

$a_1\cdot a_n=a_1a_1q^{n-1}=a_1^2q^{n-1}=a_2\cdot a_{n-1}=a_k\cdot a_{n-k+1}$

两项下角码之和只要是 n+1，则这两项距首末两项必等远

C)当 $k\neq 1$ 时，距 a_k 前后等远两项之积必相等，即

$a_k^2=a_{k-1}\cdot a_{k+1}=\cdots\cdots$

五、特殊数列求和——常用数列的前 n 项和：

$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

$1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$；

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=[\dfrac{n(n+1)}{2}]^2$

第五章 排列组合与概率初步

一、两个原理

1、加法原理

如果完成一件事可以有 n 类办法，在第 i 类办法中有 m_i 种不同的方法(i=1,2,⋯,n)，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

2、乘法原理

如果完成一件事需要分成 n 个步骤，做第 i 步有 m_i 种不同的方法(i=1,2,⋯,n)，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种不同的方法

二、排列与组合

1、排列与排列数

（1） 定义：从 n 个不同的元素中任取 m($m\le n$)个，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列；所有这些排列的个数，称为排列数，记为 P_n^m。

（2） 排列数公式：$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$

注：阶乘（全排列）$P_m^m=m!$

2、组合与组合数

（1）定义：从 n 个不同的元素中任取 m($m \le n$)个并成一个组，称为从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合；所有这些组合的个数，称为组合数，记为C_n^m。

（2）组合数公式：$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

（3）基本性质：$C_n^m = C_n^{n-m}, C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, \sum_{k=0}^{n} C_n^m = 2^n$

三、二项式定理及组合恒等式

（1）二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

第 k+1 项：$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

（2）　常用组合恒等式

① $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots C_n^n = 2^n$

② $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \cdots C_n^n = 2^{n-1}$　　（n 为偶数）

③ $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots C_n^n = 2^{n-1}$　　（n 为奇数）

四、古典概率的基本概念

基本事件、必然事件、不可能事件、和事件、积事件、互不相容事件、对立事件。

1、 概率的性质与概念

（1）性质：

$0 \le P(A) \le 1, P(\Phi)=0, P(\Omega)=1$，$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

如 A,B 互不相容，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

2、 几种特殊事件发生的概率

（1）等可能事件（古典概型）$P(A)=\dfrac{m}{n}$

（2）互不相容事件 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

对立事件 $P(A)+P(\overline{A})=1$

（3）相互独立事件 $P(A \cap B)=P(A)P(B)$

（4）独立重复试验

如果在一次试验中某事件发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中在这个事件恰好发生 k 次概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

条件概率：$\mathrm{P}(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

(B/A)表示在事件A发生的条件下事件B发生。

五、随机事件部分

1、事件间的四种关系

（1）包含 $A \subset B$

结论： $A \subset B \Leftrightarrow P(A) \le P(B)$

$$A \subset B \Leftrightarrow A+B=B \Leftrightarrow AB=A \Leftrightarrow \overline{A} \supset \overline{B}$$

(2)相等 A=B（两个事件 A,B 样本点完全一致）

结论：$A=B\Rightarrow P(A)=P(B)$

$A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\subset B\\B\subset A\end{cases}$

(3)对立 $B=\overline{A}$

结论：$\overline{A}=B\Leftrightarrow A=\overline{B}\Leftrightarrow\overline{A}\cdot\overline{B}=A\cdot B$

(4)互斥：$A\cdot B=\phi$

结论：$A\cdot B=\phi\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}\Leftrightarrow\overline{A}+\overline{B}=\Omega$

A,B 互斥$\Leftarrow A,B$ 对立$\Leftrightarrow\begin{cases}A\cdot B=\phi\\A+B=\Omega\end{cases}$

2、事件间的三种运算

（1）和（并）：$A+B=A\bigcup B$

（2）差：$A-B=A-AB=A\cdot\overline{B}$

（3）积：$A\cdot B=A\bigcap B$

3、概率运算公式

（1）若 $A\subset B$,则有 $P(A)\leq P(B)$ 和 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

（2）$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$ （减法公式）

（3）$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (加法公式)

（4）$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

（5）$P(\overline{A})=1-P(A)$

4、乘法公式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$$

5、事件的独立性

（1）事件 A 与 B 互相独立⇔$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

（2）当$P(A)P(B)>0$时

若 A 与 B 互相独立，则 A 与 B 必不互斥（独立不互斥）

若 A 与 B 互斥，则 A 与 B 必不独立（互斥不独立）

（3）特殊情况：

a．ϕ与任何事件互相独立并且互斥。

b．Ω与任何事件相互独立。

c．P(A)=0 的事件 A 与任何事件互相独立

6、独立试验序列

（1）贝努里：n 次试验中成功 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

（2）直到第 k 次试验，A 才首次发生

$$P_k=q^{k-1}\cdot p$$

（3）做 n 次贝努里试验，直到第 n 次，才成功 k 次

$$P=C_{n-1}^{k-1}p^k q^{n-k}$$

第六章 平面几何与解析几何初步

第一节 平面几何

一、相交线、平行线

1. 相交线的有关性质：

（1）对顶角相等

（2）经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线。

2. 平行线的有关性质：

（1）经过已知直线外一点，有且只有一条直线和已知直线平行

（2）两条平行线被第三条直线所截，所得的同位角、内错角相等，同旁内角互补。

3. 平行线的判定方法：

（1）若两条直线同时平行于第三条直线，那么这两条直线也相互平行

（2）两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等（或内错角相等，或同旁内角互补），那么这两条直线平行。

4. 有关“距离”的知识

（1）连结两点的线段的长叫做两点间的距离

（2）从直线外一点向已知直线作垂线，这点到垂足之间的距离叫做点到直线的距离

（3）两平行线间的距离处处相等。

二、三角形

（1）三角形内角之和

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$$

三角形外角等于不相邻的两个内角之和。

（2）三角形面积公式；$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

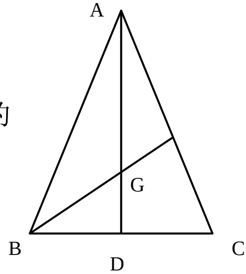
其中 h 是 a 边上的高，C 是 a,b 边所夹的角，p 为三角形的半周长。

（3）三角形三边关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。

（4）三角形中线的交点是重心，设 G 是重心，
则 AG:GD=2:1．（见右图）

（5）连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线，三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半。

（6）几种特殊三角形（直角、等腰、等边）



勾股定理：$c^2 = a^2 + b^2$

常见勾股数：3，4，5；6，8，10；9，12，15；5，12，13

等腰直角三角形的三边之比：1：1：$\sqrt{2}$

等腰三角形底边上的中线和高重合。

三角形知识点总结：

- 三角形
  - 全等三角形
    - 判定
      - 斜边直角边公理
      - 角角边公理
      - 边边边公理
      - 边角边公理
      - 角边角公理
    - 性质
      - 对应角相等
      - 对应边相等
  - 三角形的分类
    - 按角分
      - 直角三角形
      - 斜三角形
    - 按边分
      - 等腰三角形 $\Rightarrow$ 等边三角形
        - 轴对称
        - 线段的垂直平分线
      - 不等边三角形
  - 三角形的性质：三边关系及内角和定理

三、四边形

（1）矩形（正方形）

矩形两边长为 a,b, 面积为$S = ab$, 周长$l = 2(a+b)$,对角线长为

$\sqrt{a^2 + b^2}$

（2）平行四边形（菱形）

平行四边形两边长是 a,b, 以 b 为底边的高为 h，面积为$s = bh$，

周长$l = 2(a+b)$

（3）梯形

若梯形的上底为 a，下底为 b，高为 h，则中位线 M=$\frac{1}{2}$（a+b），

面积 S=$\frac{1}{2}$（a+b）h=Mh。

四、圆和扇形

（1）圆的圆心为O，半径为 R，直径为 d，则

周长为$C = 2\pi R$

面积是$s = \pi R^2$

（2）扇形 OAB 中，圆心角为$\theta°$，则

AB 弧长$l = \frac{\theta}{360}C = \frac{\theta}{360} \cdot 2\pi R$

扇形面积$s = \frac{1}{2}Rl = \frac{\theta}{360}\pi R^2$

（3）圆是轴对称图形，对称轴是经过圆心的任一直线，反映圆的轴对称性质的定理是“垂径”定理及其逆定理，凡（1）过圆心的直线 （2）垂直于弦（3）平分弦 （4）平分弦所对的弧，在图形中

出现有两个，就能推出其他两个。

（4）圆有旋转不变性，反映这条性质的是“弦，弧，弦心距，圆心角之间的关系”定理。在同圆或等圆中，（1）弦相等　（2）弧（劣弧）相等　（3）弦心距相等　（4）圆心角相等，只要具有其中的一个，就能推出其他几个。

五、直线和圆、圆与圆的位置关系

设圆的半径为 R，圆心到直线的距离为 d，　则

直线和圆相交 $\Leftrightarrow$ d<R

直线和圆相切 $\Leftrightarrow$ d=R

直线和圆相离 $\Leftrightarrow$ d>R

设两圆半径分别为 R,r（R>r），圆心距为 d

两圆位置关系	公切线条数		有关性质
	外	内	
外离 $\Leftrightarrow d>R+r$	2	2	
外切 $\Leftrightarrow d=R+r$	2	1	两圆的连心线经过切点
相交 $\Leftrightarrow R-r<d<R+r$	2	0	两圆的连心线垂直平分公共弦
内切 $\Leftrightarrow d=R-r$	1	0	两圆的连心线经过切点
内含 $\Leftrightarrow d<R-r$	0	0	

六、切线的判定方法有：

（1）过半径的外端，并且垂直于这条半径

（2）和圆心的距离等于半径

七、切线的性质有

（1）切线垂直于过切点的半径

（2）经过切点（或圆心）垂直于切线的直线经过圆心（或切点）

八、从圆外一点到圆的两条切线的长相等，这点和圆心的连线平分两条切线的夹角。

九、三角形“五心”

三角形中有重心、外心 、垂心、内心、旁心，这 5 个重要点

重心：是三角形的三条中线的交点。各中线被这个点分成比为 2：1 的两部分

外心：是三角形的三边的垂直平分线的交点。此点到三角形的三个顶点的距离相等，以此点为圆心，到一点距离为半径的圆经过三角形的三个顶点，即三角形的外接圆的圆心叫做三角形的外心。

垂心：是从三角形的各顶点向其对边所作的三条垂线的交点。

内心：是三角形的三条角平分线的交点。该点到三角形的三边距离相等。也就是内切圆的圆心。

注：①三角形的面积等于内切圆半径与三角形周长乘积的一半。

②直角三角形的内切圆半径 $r=\dfrac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

旁心：是三角形的任意两角的外角平分线和第三角的内角平分线的交点。该点到三角形的三边所在直线的距离相等。

关于三角形“五心”问题一般和几何结合来考核。

十、特殊角的三角函数值：

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	无定义	0

十一、简单立体公式

（1）直棱柱　　设高为 h，底周长为 C，底面积为 S，则

侧面积=Ch，　全面积=2S+Ch，　体积=Sh

（2）圆柱　　　设底面半径为 r，高为 h，则

侧面积=2πrh，　底面积=2πr^2，　体积=πr^2h

（3）锥体　　底面积为 S，高为 h，体积=$\frac{1}{3}$Sh

（4）球　　　表面积=4πr^2，体积=$\frac{4\pi r^3}{3}$

第三节　解析几何初步

1、数轴上两点间距离公式：$\left|AB\right|=\left|x_B-x_A\right|$

2、直角坐标平面内的两点间距离公式：

$$\left|P_1P_2\right|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}$$

3、若点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 成定比 λ，则 $\lambda=\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$

4、直线 L: $\mathrm{A}x+By+C=0$

（1）　L 关于 x 轴对称的直线是：$\mathrm{A}x+B(-y)+C=0$

（2）　L 关于 y 轴对称的直线是：$\mathrm{A}(-x)+By+C=0$

（3）　L 关于原点对称的直线是：$\mathrm{A}(-x)+B(-y)+C=0$

（4）　L 关于 y=x 对称的直线是：$Bx+Ay+C=0$

（5）　L 关于 y=-x 对称的直线是：$B(-x)+A(-y)+C=0$

5、若点 $P_1\left(x_1,y_1\right),P_2\left(x_2,y_2\right),P\left(x,y\right)$，点 P 分有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 成定比 λ，则：$x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

若 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right),C\left(x_3,y_3\right)$,则△ABC 的重心 G 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)。$$

6、直线斜率的定义式为 k=tgα ,两点式为$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。

直线方程的五种形式：

名称	方程形式	适用范围
斜截式	$y=kx+b$	不含垂直于 x 轴的直线
点斜式	$y-y_1=k(x-x_1)$	不含直线 $x=x_1$
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	不含直线 $x=x_1(x_1\neq x_2)$ 和直线 $y=y_1(y_1\neq y_2)$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不含垂直于坐标轴和过原点的直线
一般式	$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$	平面直角坐标系内的直线都适用

7、两条直线的位置关系：

（1）两条直线的交点：若直线

$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$相交$(A_1B_2\neq A_2B_1)$，则它

们交点坐标为方程组$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$

的唯一一组实数解。

（2）两条直线的平行和垂直：

＜1＞若$l_1:y=k_1x+b_1,l_2:y=k_2x+b_2$

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$；②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$。

＜2＞若$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$，$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

$(A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} \neq 0 \text{且} A_2^2 + B_2^2 \neq 0)$

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \\ B_1 C_2 - B_2 C_1 \neq 0 \end{cases}$或$\begin{cases} A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0 \\ A_1 C_2 - A_2 C_1 \neq 0 \end{cases}$;

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

8、点、直线的对称问题：

设点$P(x_0, y_0)$是直角坐标系内的任意一点，则点$P(x_0, y_0)$

（1）关于 x 轴的对称点为$(x_0, -y_0)$；关于 y 轴的对称点为

$(-x_0, y_0)$；

关于原点的对称点为$(-x_0, -y_0)$；关于点$A(\mathrm{a}, b)$的对称点为

$(2a - x_0, 2b - y_0)$；

（2）关于直线 x=a 的对称点$(2a - x_0, y_0)$；关于直线 y=a 的对称点为

$(x_0, 2a - y_0)$；

关于直线 y=x 的对称点为（y_0，x_0）；关于直线 y=-x 的对称点

为（-y_0，-x_0）

（3）关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点为 (x_1,y_1)，则 (x_1,y_1) 是方程组 $\begin{cases} A\cdot\dfrac{x_0+x_1}{2}+B\cdot\dfrac{y_0+y_1}{2}+C=0 \\ \dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(-\dfrac{A}{B})=-1 \end{cases}$ 的解。

（4）直线 $l:Ax+By+C=0$ 关于点 $P(x_0,y_0)$ 对称的直线方程为 $A(2x_0-x)+B(2y_0-y)+C=0$。

（5）直线关于直线的对称直线（相交直线而言）：

设直线 $l_1:Ax+By+C=0$ 关于直线 $l:ax+by+c=0$ 的对称直线为 l_2，

则 l_2 必过 l_1 与 l 的交点，且 l_2 到 l 的角等于 l 到 l_1 的角，从而求得 l_2 的斜率。

经过两条直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程是：$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$

9、直线 $l_1:y=k_1x+b_1, l_2:y=k_2x+b_2$，则从直线 l_1 到直线 l_2 的角 θ，$tg\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},\theta\in(0,\pi)$

直线l_1与l_2的夹角θ指它们所成的锐角，满足$tg\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$

直线: $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0, l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$

则从直线l_1到直线l_2的角θ满足：$tg\theta=\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$

直线l_1与l_2的夹角θ满足：$tg\theta=\left|\dfrac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}\right|$

10、点 P(x_0,y_0)到直线$l:Ax+By+C=0$的距离：

$$\mathrm{d}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

11、两条平行直线$l_1:Ax+By+C_1=0$，$l_2:Ax+By+C_2=0$的距离

是$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

第三节　圆及其相关性质

一、定义：到一定点距离相等的点的集合

标准方程：$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$

圆心坐标$\left(x_0,y_0\right)$,半径 R

圆心在原点，半径为 R 的圆的标准方程为$x^2+y^2=R^2$

二、圆心的三个重要几何性质

（1）　圆心在过切点且与切线垂直的直线上；

（2）　圆心在某一条弦的中垂线上；

（3）　两圆外切或内切时，切点与两圆圆心三点共线

三、圆的一般方程

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\left(D^2+E^2-4F>0\right)$，其圆心坐标为

$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$。$D^2+E^2-4F=0$时，

方程表示一点$\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；当$D^2+E^2-4F<0$时，方程不表示任

何图形。

四、点和圆、直线和圆的位置关系

1．点$P\left(x_0,y_0\right)$与圆的位置关系：

（1）对于圆的标准方程$\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=r^2$，若

$d=\sqrt{(a-x_0)^2+(b-y_0)^2}$，则有：

$d<r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆内。

$d=r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆上。

$d>r\Leftrightarrow$ 点 P 在圆外。

（2）对于圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 则有：

$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F<0\Leftrightarrow$ 点 P 在圆内；

$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F=0\Leftrightarrow$ 点 P 在圆上；

$x_0^2+y_0^2+Dx_0+Ey_0+F>0\Leftrightarrow$ 点 p 在圆外；

2．直线与圆的位置关系有三种：

直线 $Ax+By+c=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系：

（1）　计算判断法：圆心到直线的距离：$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

$d>r\Leftrightarrow$ 相离；$d=r\Leftrightarrow$ 相切；$d<r\Leftrightarrow$ 相交

（2）　判别式法：联立直线和圆的方程，得到一元二次方程：

相离 $\Leftrightarrow\Delta<0$；相切 $\Leftrightarrow\Delta=0$；相交 $\Leftrightarrow\Delta>0$。

五、圆与圆的位置关系

设两圆圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2。$|O_1O_2|=d$，则：

$d>r_1+r_2\Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4 条公切线；

$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3 条公切线；

$\left|r_1-r_2\right|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2 条公切线；

$d=\left|r_1-r_2\right| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1 条公切线；

$0<d<\left|r_1-r_2\right| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线

六、直线与圆，圆与圆的交点问题：（λ 是待定的系数）

1．过直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交点的圆系方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda\left(Ax+By+C\right)=0$

2．过圆 $C_1: x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_1: x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda\left(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2\right)=0$

七、两圆的公共弦方程（若两圆相交）

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$